

Ioan-Florin Bugariu
Cristinel Severin
Georgiana Cârlogea

Matematică pentru încredere și reușită

Înțelegere. Exersare. Succes

Clasa a VI-a

I



Cuprins

Continuăm descoperirile din domeniul matematicii	3
--	---

Capitolul I

Mulțimi. Mulțimea numerelor naturale

1	Descriere, notații, reprezentări; mulțimi numerice/nenumерice; relația dintre un element și o mulțime; relații între mulțimi	11
2	Mulțimi finite, cardinalul unei mulțimi finite; mulțimi infinite, mulțimea numerelor naturale	23
3	Operații cu mulțimi: reuniune, intersecție, diferență	29
Teste recapitulative		
	Test 1	39
	Test 2	39
4	Descompunerea numerelor naturale în produs de puteri de numere prime	40
5	Determinarea celui mai mare divizor comun (c.m.m.d.c.); numere prime între ele	45
6	Determinarea celui mai mic multiplu comun (c.m.m.m.c.)	52
7	Proprietăți ale divizibilității în $\mathbb{N}$	60
Formule și rezultate utile		65

Capitolul II

Rapoarte. Proporții

1	Rapoarte; procente; proporții; proprietatea fundamentală a proporțiilor; determinarea unui termen necunoscut dintr-o proporție; proporții derivate	69
2	Șir de rapoarte egale; mărimi direct proporționale; mărimi invers proporționale; regula de trei simplă	80
3	Elemente de organizare a datelor; reprezentarea datelor prin grafice în contextul proporționalității; reprezentarea datelor cu ajutorul unor softuri matematice	90
Teste recapitulative		
	Test 1	96
	Test 2	97
Formule și rezultate utile		98

Capitolul III

Mulțimea numerelor întregi

1	Mulțimea numerelor întregi; opusul unui număr întreg; reprezentarea pe axa numerelor; modulul unui număr întreg; compararea și ordonarea numerelor întregi	103
2	Adunarea numerelor întregi, proprietăți; scăderea numerelor întregi	114

Teste recapitulative	
Test 1	129
Test 2	130
3 Înmulțirea numerelor întregi, proprietăți	131
4 Împărțirea numerelor întregi când deîmpărțitul este multiplu al împărțitorului	138
Teste recapitulative	
Test 1	146
Test 2	147
5 Puterea cu exponent număr natural a unui număr întreg nenul; reguli de calcul cu puteri	148
6 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	155
7 Ecuații, inecuații, probleme care se rezolvă cu ajutorul ecuațiilor/inecuațiilor în contextul numerelor întregi	160
Teste recapitulative	
Test 1	169
Test 2	169
Formule și rezultate utile	170

Capitolul IV

Mulțimea numerelor raționale

1 Număr rațional; mulțimea numerelor raționale; reprezentarea numerelor raționale pe axa numerelor, opusul unui număr rațional; modulul; compararea și ordonarea numerelor raționale	177
2 Adunarea numerelor raționale; proprietăți; scăderea numerelor raționale	188

Teste recapitulative	
Test 1	200
Test 2	201
3 Înmulțirea numerelor raționale; proprietăți; împărțirea numerelor raționale; puterea cu exponent număr întreg a unui număr rațional nenul; reguli de calcul cu puteri	202
4 Ordinea efectuării operațiilor și folosirea parantezelor	217

Teste recapitulative	
Test 1	224
Test 2	225
5 Ecuații de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$, unde a , b și c sunt numere raționale; probleme care se rezolvă folosind ecuații de acest tip	226

Teste recapitulative	
Test 1	235
Test 2	236
Formule și rezultate utile	237

Soluții	242
----------------------	-----

Competențe generale

1. Identificarea unor date, mărimi și relații matematice, în contextul în care acestea apar
2. Prelucrarea unor date matematice de tip cantitativ, calitativ, structural, cuprinse în diverse surse informaționale
3. Utilizarea conceptelor și a algoritmilor specifici în diverse contexte matematice
4. Exprimarea în limbajul specific matematicii a informațiilor, concluziilor și demersurilor de rezolvare pentru o situație dată
5. Analizarea caracteristicilor matematice ale unei situații date
6. Modelarea matematică a unei situații date, prin integrarea achizițiilor din diferite domenii

Competențe specifice

- 1.1. Identificarea unor noțiuni specifice mulțimilor și relației de divizibilitate în $\mathbb{N}$
- 1.2. Identificarea rapoartelor, proporțiilor și a mărimilor direct sau invers proporționale
- 1.3. Identificarea caracteristicilor numerelor întregi în contexte variate
- 1.4. Recunoașterea fracțiilor echivalente, a fracțiilor ireductibile și a formelor de scriere a unui număr rațional
- 1.5. Recunoașterea unor figuri geometrice plane (drepte, unghiuri, cercuri, arce de cerc) în configurații date
- 1.6. Recunoașterea unor elemente de geometrie plană asociate noțiunii de triunghi
- 2.1. Evidențierea în exemple a relațiilor de apartenență, de incluziune, de egalitate și a criteriilor de divizibilitate cu 2, 5, 10², 3 și 9 în $\mathbb{N}$
- 2.2. Prelucrarea cantitativă a unor date utilizând rapoarte și proporții pentru organizarea de date
- 2.3. Utilizarea operațiilor cu numere întregi pentru rezolvarea ecuațiilor și inecuațiilor
- 2.4. Aplicarea regulilor de calcul cu numere raționale pentru rezolvarea ecuațiilor de tipul: $x + a = b$, $x \cdot a = b$, $x : a = b$ ($a \neq 0$), $ax + b = c$, unde a, b și c sunt numere raționale
- 2.5. Recunoașterea coliniarității unor puncte, a faptului că două unghiuri sunt opuse la vârf, adiacente, complementare sau suplementare și a paralelismului sau perpendicularității a două drepte
- 2.6. Calcularea unor lungimi de segmente, măsuri de unghiuri în contextul geometriei triunghiului
- 3.1. Utilizarea unor modalități adecvate de reprezentare a mulțimilor și de determinare a c.m.m.d.c. și a c.m.m.m.c.
- 3.2. Aplicarea unor metode specifice de rezolvare a problemelor în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct/invers proporționale
- 3.3. Aplicarea regulilor de calcul și folosirea parantezelor în efectuarea operațiilor cu numere întregi
- 3.4. Utilizarea proprietăților operațiilor pentru compararea și efectuarea calculelor cu numere raționale
- 3.5. Utilizarea unor proprietăți referitoare la distanțe, drepte, unghiuri, cerc pentru realizarea unor construcții geometrice
- 3.6. Utilizarea criteriilor de congruență și a proprietăților unor triunghiuri particulare pentru determinarea caracteristicilor unei configurații geometrice
- 4.1. Exprimarea în limbaj matematic a unor situații concrete care se pot descrie utilizând mulțimile și divizibilitatea în $\mathbb{N}$
- 4.2. Exprimarea în limbaj matematic a relațiilor și a mărimilor care apar în probleme cu rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale
- 4.3. Redactarea etapelor de rezolvare a ecuațiilor și a inecuațiilor studiate în mulțimea numerelor întregi
- 4.4. Redactarea etapelor de rezolvare a unor probleme folosind operații în mulțimea numerelor raționale
- 4.5. Exprimarea prin reprezentări geometrice sau în limbaj specific matematic a noțiunilor legate de dreaptă, unghi și cerc
- 4.6. Exprimarea în limbaj geometric simbolic și figurativ a caracteristicilor triunghiurilor și ale liniilor importante în triunghi
- 5.1. Analizarea unor situații date în contextul mulțimilor și al divizibilității în $\mathbb{N}$
- 5.2. Analizarea unor situații practice cu ajutorul rapoartelor, proporțiilor și a colecțiilor de date
- 5.3. Interpretarea unor date din probleme care se rezolvă utilizând numerele întregi
- 5.4. Determinarea unor metode eficiente în efectuarea calculelor cu numere raționale
- 5.5. Analizarea seturilor de date numerice sau a reprezentărilor geometrice în vederea optimizării calculelor cu lungimi de segmente, distanțe, măsuri de unghiuri și de arce de cerc
- 5.6. Analizarea unor construcții geometrice în vederea evidențierii unor proprietăți ale triunghiurilor
- 6.1. Transpunerea, în limbaj matematic, a unor situații date utilizând mulțimi, operații cu mulțimi și divizibilitatea în $\mathbb{N}$
- 6.2. Modelarea matematică a unei situații date în care intervin rapoarte, proporții și mărimi direct sau invers proporționale
- 6.3. Transpunerea, în limbaj algebric, a unei situații date, rezolvarea ecuației sau inecuației obținute și interpretarea rezultatului
- 6.4. Interpretarea matematică a unor probleme practice prin utilizarea operațiilor cu numere raționale
- 6.5. Interpretarea informațiilor conținute în reprezentări geometrice pentru determinarea unor lungimi de segmente, distanțe și a unor măsuri de unghiuri/arce de cerc
- 6.6. Transpunerea, în limbaj specific, a unei situații date legate de geometria triunghiului, rezolvarea problemei obținute și interpretarea rezultatului

2

Șir de rapoarte egale; mărimi direct proporționale; mărimi invers proporționale; regula de trei simplă

II.2.1. Șir de rapoarte egale

1. Se consideră raportul $\frac{3}{2}$. Scrieți un șir de rapoarte egale cu raportul dat prin amplificarea acestuia, pe rând, cu numerele 2, 4 și 5.

Ne reamintim: Trei sau mai multe rapoarte care au aceeași valoare formează un șir de rapoarte egale. Într-un șir de rapoarte egale, oricare două rapoarte formează o proporție.

Amplificare cu 2: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$; amplificare cu 4: $\frac{3}{2} = \frac{12}{8}$; amplificare cu 5: $\frac{3}{2} = \frac{15}{10} \Rightarrow$ șirul de rapoarte egale: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10}$.

2. Scrieți un șir de rapoarte egale cu raportul $\frac{4}{7}$ prin amplificarea acestuia, pe rând, cu numerele 3, 10 și 11.
3. Aflați numerele naturale nenule a și b în următoarele cazuri:

a. $\frac{a}{6} = \frac{10}{b} = \frac{2}{3}$;

Observăm că din șir putem extrage două proporții folosind raportul cunoscut $\frac{2}{3}$ și unul dintre celelalte două rapoarte. Astfel, îl vom afla pe a din proporția $\frac{a}{6} = \frac{2}{3}$, iar pe b din proporția $\frac{10}{b} = \frac{2}{3}$.

$$\frac{a}{6} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow a = \frac{6 \cdot 2}{3} \Leftrightarrow a = \frac{12}{3} \Leftrightarrow a = 4;$$

$$\frac{10}{b} = \frac{2}{3} \Leftrightarrow b = \frac{10 \cdot 3}{2} \Leftrightarrow b = \frac{30}{2} \Leftrightarrow b = 15.$$

b. $\frac{a}{8} = \frac{b}{14} = \frac{1}{2}$;

c. $\frac{20}{a} = \frac{b}{18} = \frac{5}{3}$.

4. Pentru a obține 12 clătite, o gospodină a folosit pentru aluat următoarele ingrediente: 600 ml lapte, 300 g făină, 150 g zahăr și 3 ouă. Ce cantități va folosi gospodina pentru a obține 20 de clătite?

Notăm cu litere cantitățile necesare pentru a obține 20 de clătite: x ml – lapte, y g – făină, z g – zahăr și t – numărul de ouă.

Pentru a păstra proprietățile compoziției aluatului, cantitățile de ingrediente trebuie să păstreze același raport, egal cu $\frac{12 \text{ clătite}}{20 \text{ clătite}} = \frac{3}{5}$. Obținem următorul șir de rapoarte egale:

$$\frac{3}{5} = \frac{600}{x} = \frac{300}{y} = \frac{150}{z} = \frac{3}{t}.$$

Scriem proporțiile din șir formate cu raportul $\frac{3}{5}$ și aflăm termenii necunoscuți.

$$\frac{3}{5} = \frac{600}{x} \Leftrightarrow x = \frac{5 \cdot 600}{3} \Leftrightarrow x = 1000; \quad \frac{3}{5} = \frac{300}{y} \Leftrightarrow y = \frac{5 \cdot 300}{3} \Leftrightarrow y = 500;$$

$$\frac{3}{5} = \frac{150}{z} \Leftrightarrow z = \frac{5 \cdot 150}{3} \Leftrightarrow z = 250; \quad \frac{3}{5} = \frac{3}{t} \Leftrightarrow t = 5$$

În concluzie, pentru a obține 20 de clătite, gospodina va folosi: 1000 ml = 1 l de lapte, 500 g de făină, 250 g zahăr și 5 ouă.

5. Pentru a obține 100 kg de furaj pentru animale, un fermier folosește următorul amestec: 50 kg de porumb măcinat, 20 kg de grâu măcinat, 18 kg de șrot de floarea soarelui, 12 kg de șrot de soia. Ce cantități va folosi fermierul pentru a obține 150 kg de furaj?



6. Determinați numerele naturale x , y și z în următoarele cazuri:

a. $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5}$ și $x + y + z = 33$;

Ne reamintim proprietatea fundamentală a șirului de rapoarte egale: într-un șir de rapoarte egale, raportul dintre suma numărătorilor și suma numitorilor este egal cu fiecare dintre rapoartele șirului.

$$\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{5} = \frac{x+y+z}{2+4+5} = \frac{33}{11} = \frac{3}{1}$$

Scriem proporțiile din șir formate cu raportul $\frac{3}{1}$ și aflăm termenii necunoscuți.

$$\frac{x}{2} = \frac{3}{1} \Rightarrow x = 6; \quad \frac{y}{4} = \frac{3}{1} \Rightarrow y = 12; \quad \frac{z}{5} = \frac{3}{1} \Rightarrow z = 15.$$

b. $\frac{x}{7} = \frac{y}{11} = \frac{z}{10}$ și $x + y + z = 56$; c. $\frac{x}{20} = \frac{y}{45} = \frac{z}{61}$ și $x + y + z = 630$.

7. Determinați numerele naturale nenule m , n și p în următoarele cazuri:

a. $\frac{m}{5} = \frac{n}{6} = \frac{p}{9}$ și $2m + 3n + 8p = 200$;

Deoarece în relația $2m + 3n + 8p = 200$ apar termenii $2m$, $3n$ și $8p$, procedăm astfel:

– amplificăm raportul care-l conține pe m cu 2 $\rightarrow \frac{2m}{5} = \frac{2m}{10}$;

$$\begin{aligned}
 & - \text{amplificăm raportul care-l conține pe } n \text{ cu } 3 \rightarrow \frac{3n}{6} = \frac{3n}{18}; \\
 & - \text{amplificăm raportul care-l conține pe } p \text{ cu } 8 \rightarrow \frac{8p}{9} = \frac{8p}{72}. \\
 & \frac{m}{5} = \frac{n}{6} = \frac{p}{9} \Rightarrow \frac{2m}{10} = \frac{3n}{18} = \frac{8p}{72} = \frac{2m+3n+8p}{10+18+72} = \frac{200}{100} = \frac{2}{1} \Rightarrow \frac{m}{5} = \frac{n}{6} = \frac{p}{9} = \frac{2}{1} \\
 & \frac{m}{5} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow m = 10; \frac{n}{6} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow n = 12; \frac{p}{9} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow p = 18
 \end{aligned}$$

$$\text{b. } \frac{m}{2} = \frac{n}{3} = \frac{p}{4} \text{ și } 3m + 2n + 3p = 120; \quad \text{c. } \frac{m}{4} = \frac{n}{8} = \frac{p}{7} \text{ și } m + 5n + 6p = 258.$$

II.2.2. Mărimi direct proporționale

1. Dacă perechile de mărimi de mai jos sunt direct proporționale, bifați **Da**; în caz contrar, bifați **Nu**.

a. Numărul de caiete de un anumit tip cumpărate și costul total. ☒ Da ☐ Nu

Ne reamintim: două mărimi care depind una de alta astfel încât, dacă una crește (scade) de un număr de ori și cealaltă crește (scade) de același număr de ori, se numesc mărimi direct proporționale.

Dacă numărul de caiete crește (scade) de un număr de ori, atunci costul crește (scade) de același număr de ori. În concluzie, cele două mărimi, numărul de caiete și costul acestora sunt mărimi direct proporționale.

b. Viteza unui autoturism și timpul necesar pentru a parcurge o anumită distanță. ☐ Da ☐ Nu

c. Numărul de ore lucrate și salariul, cu plata fixă pe oră. ☐ Da ☐ Nu

d. Numărul de muncitori și timpul necesar pentru realizarea unei lucrări. ☐ Da ☐ Nu

e. Cantitatea de benzină alimentată la un moment dat și costul total. ☐ Da ☐ Nu

f. Perimetrul unui pătrat și lungimea laturii. ☐ Da ☐ Nu

g. Timpul și distanța parcursă de un autoturism care se deplasează cu viteză constantă. ☐ Da ☐ Nu

h. Numărul de robinete deschise și timpul de umplere al unui bazin. ☐ Da ☐ Nu

2. Într-o fabrică se obțin 3 l de ulei din 9 kg de semințe de dovleac. Stabiliți câte kilograme de semințe sunt necesare pentru a obține:

a. 1 l de ulei; b. 5 l de ulei.

a. Deoarece cantitatea de ulei scade de trei ori, atunci și cantitatea de semințe va scădea de trei ori:

3 l ulei 9 kg semințe

1 l ulei $9 : 3 = 3$ kg semințe.

b. Deoarece cantitatea de ulei crește de cinci ori, atunci și cantitatea de semințe va crește de cinci ori:

1 l ulei 3 kg semințe

5 l ulei $5 \cdot 3 = 15$ kg semințe.

3. Într-o fabrică, din 2 kg de fructe se obține 1 l de suc natural. Completați următorul tabel:

Cantitate mere (kg)	1	2	4	5
Cantitate suc (l)		1		

4. Un muncitor a fost remunerat pentru 5 ore de lucru cu suma de 250 de lei. Completați următorul tabel:

Număr ore lucrate	2	5	7	10
Suma primită (lei)		250		

5. Verificați dacă următoarele mulțimi ordonate sunt direct proporționale:

a. (3, 4, 7) și (9, 12, 21);

O mulțime este ordonată dacă ordinea elementelor sale contează.

Ne reamintim: Mulțimile (a, b, c) și (d, e, f) sunt direct proporționale dacă cu elementele corespunzătoare ale fiecăreia dintre ele se poate forma

șirul de rapoarte egale: $\frac{a}{d} = \frac{b}{e} = \frac{c}{f} = k$. Valoarea comună a rapoartelor este notată cu k și se numește coeficient de proporționalitate.

Avem: $\frac{3^{(3)}}{9} = \frac{1}{3}$, $\frac{4^{(4)}}{12} = \frac{1}{3}$ și $\frac{7^{(7)}}{21} = \frac{1}{3} \Rightarrow \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \frac{7}{21} \Rightarrow (3, 4, 7)$ și $(9, 12, 21)$ sunt direct proporționale.

b. (4, 10, 16) și (2, 5, 8);

c. (1, 5, 7) și (6, 25, 35);

d. (0,2; 0,3; 0,4) și (1; 1,5; 2).

6. Aflați numerele a, b, c știind că sunt direct proporționale cu numerele 3, 6, 8 și $c - b + 2 \cdot a = 24$.

1. Scriem șirul de rapoarte egale.

Din enunț se înțelege că mulțimile ordonate (a, b, c) și $(3, 6, 8)$ sunt direct proporționale.

$$(a, b, c) \text{ d.p. } (3, 6, 8) \Rightarrow \frac{a}{3} = \frac{b}{6} = \frac{c}{8} = k$$

2. Scriem numerele a, b, c cu ajutorul lui k .

$$\frac{a}{3} = k \Rightarrow a = 3 \cdot k; \frac{b}{6} = k \Rightarrow b = 6 \cdot k; \frac{c}{8} = k \Rightarrow c = 8 \cdot k.$$

3. Înlocuim numerele a, b și c în relația dată și aflăm valoarea lui k .

$$c - b + 2 \cdot a = 24 \Leftrightarrow 8 \cdot k - 6 \cdot k + 2 \cdot 3 \cdot k = 24 \Leftrightarrow 8 \cdot k = 24 \Leftrightarrow k = 3.$$

4. Calculăm valorile numerelor a, b și c folosind valoarea lui k .

$$a = 3 \cdot 3 \Rightarrow a = 9; b = 6 \cdot 3 \Rightarrow b = 18; c = 8 \cdot 3 \Rightarrow c = 24.$$

7. Determinați numerele x, y, z știind că sunt direct proporționale cu numerele 2, 3 și 4 și $x + 2 \cdot y + 3 \cdot z = 40$.

8. Să se împartă numărul 200 în părți direct proporționale cu numerele 2, 3 și 5.

Ne reamintim: a împărți un număr S în părți direct proporționale cu numerele a, b, c înseamnă a determina numerele x, y, z astfel încât $x + y + z = S$ și mulțimile (x, y, z) și (a, b, c) să fie direct proporționale.

Notăm cu x, y și z numerele care îndeplinesc condițiile: $x + y + z = 200$ și (x, y, z) d.p. (2, 3, 5).

$$(x, y, z) \text{ d.p. } (2, 3, 5) \Rightarrow \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{5} = k \Rightarrow x = 2 \cdot k, y = 3 \cdot k, z = 5 \cdot k \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x + y + z = 200 \Leftrightarrow 2 \cdot k + 3 \cdot k + 5 \cdot k = 200 \Leftrightarrow 10 \cdot k = 200 \Rightarrow k = 20; \\ x = 40, y = 60, z = 100.$$

Observație. Numerele x, y, z pot fi determinate și prin aplicarea proprietății fundamentale a șirului de rapoarte egale (vezi Problema 6.a, II.2.1).

9. Să se împartă numărul 120 în părți direct proporționale cu numerele 9, 12 și 15.

10. La o stână sunt trei ciobani care au obținut într-o zi 150 kg de brânză. Stabiliți câte kilograme de brânză revin fiecăruia, știind că primul are 120 de oi, al doilea are 130 de oi și al treilea are 150 de oi.

Notăm cu x, y și z cantitățile de brânză care revin fiecărui cioban. Aceste cantități îndeplinesc condițiile: $x + y + z = 150$ și (x, y, z) d.p. (120, 130, 150).

$$(x, y, z) \text{ d.p. } (120, 130, 150) \Rightarrow \frac{x}{120} = \frac{y}{130} = \frac{z}{150} = k \Rightarrow x = 120 \cdot k,$$

$$y = 130 \cdot k, z = 150 \cdot k \Leftrightarrow x + y + z = 150 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 120 \cdot k + 130 \cdot k + 150 \cdot k = 150 \Leftrightarrow 400 \cdot k = 150 \Rightarrow k = \frac{150}{400} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \frac{3}{8} \Rightarrow x = 120 \cdot \frac{3}{8} \Rightarrow x = 45, y = 130 \cdot \frac{3}{8} \Rightarrow y = \frac{195}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow y = 48,75, z = 150 \cdot \frac{3}{8} \Rightarrow z = \frac{225}{4} \Rightarrow z = 56,25.$$

În concluzie, cantitățile de brânză ce revin fiecărui cioban sunt: 45 kg, 48,75 kg și 56,25 kg.

11. Adunarea Generală a Acționarilor unei companii a aprobat distribuirea unui profit total de 12 000 de euro sub formă de dividende. Compania are trei acționari: Radu este consultant financiar și deține 1500 de acțiuni; Ioana este director de marketing și deține 3500 de acțiuni; Invest Capital SRL deține, ca persoană juridică, 5000 de acțiuni. Determinați ce sumă de bani va primi fiecare acționar, știind că profitul se împarte direct proporțional cu numărul de acțiuni deținute.